В случае $1 \le p < 2$ теорема 1 утверждает, что если величины ε_N, δ, h достаточно малы, то все стационарные точки задачи (3), (4), лежащие в шаре

$$B_N(u^*; m, L) = \left\{ u \in \mathscr{H}_N : \|u - u^*\|_{H_1} \le \frac{1}{M}\left(\frac{m^{2/p}}{2L}\right)^{p/(2-p)} \right\},$$

реально находятся от u^* на расстоянии порядка $O((\varepsilon_N + \delta + h^2)^{1/p})$. Тем самым, при малых ε_N, δ, h возможная многоэкстремальность задачи (3), (4) оказывается несущественной, если ограничиться указанным шаром. В частности, любая стационарная предельная точка из $B_N(u^*; m, L)$, порожденная произвольным итерационным процессом конечномерной минимизации, служит хорошим приближением для u^*. В случае $p = 2$ при выполнении условия $L/m < 1$ дополнительных ограничений на u_N^* нет, т.е. можно положить $B_N(u^*; m, L) = \mathscr{H}_N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00039а), поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9).

CLUSTERING EFFECT FOR STATIONARY POINTS OF DISCREPANCY FUNCTIONAL
IN CONDITIONALLY WELL–POSED INVERSE PROBLEMS

M.Yu. Kokurin

We prove that stationary points of finite dimensional discrepancy functional related to a conditionally well–posed inverse problem with the Holder type estimate for the continuity modulus of the inverse operator, belong to a small neighborhood of the solution to the inverse problem.

Keywords: Hilbert space, inverse problems, conditionally well–posed problems, differentiable operator.

УДК 517.983.54

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Кокурин[1]

1 *kokurin@nextmail.ru*; Марийский государственный университет, физико–математический факультет

Устанавливаются степенные оценки скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши первого и второго порядка в гильбертовом пространстве. Для этих оценок найдены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия в терминах показателя истокопредставимости искомого решения.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, гильбертово пространство, разностная схема, скорость сходимости.

Изучаются некорректные задачи Коши для дифференциально–операторных уравнений первого и второго порядка:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in [0, T]; \quad x(0) = f \in D(A); \tag{1}$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t),\ t \in [0,T]; \quad x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $A : H \to H$ — неограниченный, плотно определенный, самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H со спектром $\sigma(A) \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Для каждой из задач (1), (2) ставится вопрос о дискретной аппроксимации классического решения $x : [0,T] \to H$ на отрезке $[0,T]$; существование этого решения предполагается. Известно, что обе задачи не могут иметь более одного классического решения.

Для аппроксимации решения задачи (1) строится класс одношаговых разностных схем с параметром $\beta > 0$, имеющих порядок аппроксимации $m = 1$:

$$-x_n + x_{n+1} = \Delta t A\big((1+\beta)x_n - \beta x_{n+1}\big), \quad 0 \le n \le N-1, \quad x_0 = f. \tag{3}$$

Кроме того, изучается класс двушаговых разностных схем с параметрами $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 > 0$ для задачи (1), имеющих порядок аппроксимации $m = 2$:

$$(1-2\beta_1)x_n + (2\beta_1 - 2)x_{n+1} + x_{n+2} = \Delta t A\big((\beta_1 - \beta_2 - 1)x_n +$$
$$+ (\beta_1 + 2\beta_2 + 1)x_{n+1} - \beta_2 x_{n+2}\big), \quad 0 \le n \le N-2, \quad x_0 = f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1} f. \tag{4}$$

Для аппроксимации решения задачи (2) предлагается класс двушаговых разностных схем с параметром $\beta > 0$, имеющих порядок аппроксимации $m = 2$:

$$x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = (\Delta t)^2 A(-\beta x_n + (1+2\beta)x_{n+1} - \beta x_{n+2}), \quad 0 \le n \le N-2,$$
$$x_0 = f, \quad x_1 = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f. \tag{5}$$

В формулах (3)–(5) $\Delta t = T/N$ есть шаг дискретизации, $x_n \in H$ — приближение к значению $x(n\Delta t)$ искомой функции $x(t)$ в n–м узле дискретизации, E — единичный оператор в H.

Если $x(t)$ — классическое решение задачи (1) или (2), то элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление $x(T) = A^{-p} w$ с некоторыми $p \ge 1$, $w \in H$. Следующие теоремы устанавливают степенные оценки скорости сходимости схем (3)–(5) в зависимости от показателя истокопредставимости p соответствующего решения.

Теорема 1. *Для разностных схем (3) решения задачи (1) имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \le p < 2 \\ C_1 \Delta t, & p \ge 2 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_1 = C_1(p).$$

Теорема 2. *Для разностных схем (4) решения задачи (1) справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \le p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p \ge 3 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_2 = C_2(p).$$

Теорема 3. *Для разностных схем (5) решения задачи (2) имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_3(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \le p < 3/2 \\ C_3(\Delta t)^2, & p \ge 3/2 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_3 = C_3(p).$$

Теоремы 1–3 относятся к случаю, когда входные данные f известны точно. При изучении некорректных задач более актуален случай, когда вместо элемента f задано его приближение f_δ, $\|f_\delta - f\| \le \delta$. В этом случае количество отрезков дробления N в (3)–(5) следует выбирать в зависимости от δ.

Теорема 4. *Для разностных схем (3)–(5) в условиях приближённых входных данных при подходящем выборе зависимости $N(\delta)$ справедлива оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le C_4 \ln^{-q} \frac{1}{\delta}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_4 = C_4(p),$$

где показатель q совпадает с показателем степени при Δt в соответствующей теореме 1, 2 или 3.

Справедливы следующие теоремы, обратные к теоремам 1–3.

Теорема 5. *Пусть для схемы (3) решения задачи (1) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_5(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 2q)$. Более того, если $q > 1$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теорема 6. *Пусть для схемы (4) решения задачи (1) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_6(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 3q/2)$. Более того, если $q > 2$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теорема 7. *Пусть для схемы (5) решения задачи (2) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_7(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 3q/4)$. Более того, если $q > 2$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теоремы 1–7 допускают частичное обобщение на случай некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве. В доказательствах данных теорем широко используются операторные исчисления и техника интерполяции банаховых пространств. Эти результаты частично изложены в [1], [2], [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00039а).

Литература

1. Кокурин М. М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши* // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 58–76.

2. Кокурин М. М. *Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально–операторного уравнения второго порядка* // ЖВМ и МФ. – 2014. – Т. 54, – № 4. – С. 569–584.

3. Кокурин М. М. *Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных* // ЖВМ и МФ. – 2015. – Т. 55. – № 12. – С. 2027–2041.

CONVERGENCE RATE ESTIMATES FOR FINITE–DIFFERENCE SCHEMES OF SOLVING ILL-POSED FIRST ORDER AND SECOND ORDER CAUCHY PROBLEMS

M.M. Kokurin

We establish power rate–of–convergence estimates for finite–difference methods of solving ill–posed

Cauchy problems of the first and the second order in a Hilbert space. We find sufficient conditions for these estimates in terms of the sourcewise index of the solution, and also necessary conditions which are close to the sufficient ones.
Keywords: ill–posed Cauchy problem, Hilbert space, finite-difference scheme, rate of convergence.

УДК 517.542

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ МНОГОУГОЛЬНИК

И.А. Колесников[1]

1 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В работе получено интегро-дифференциальное уравнение для отображения комплексной полуплоскости на круговой многоугольник. С помощью этого уравнения и дифференциального уравнения Шварца записано представление для акцессорных параметров M_k.

Ключевые слова: конформное отображение, акцессорные параметры, круговой многоугольник.

Пусть Δ – круговой n-угольник с вершинами в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ – углы при этих вершинах. Пусть сторона A_1A_n кругового n-угольника Δ лежит на вещественной оси. Кривая $L = \{\zeta : \zeta = \zeta(\tau), \tau \in [t_1, t_n]\} = \partial\Delta\backslash(A_1, A_n)$ – кусочно гладкая, $\zeta(t_k) = A_k$, кривизна кривой L постоянна при $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, $t = 1, \ldots, n-1$. Касательная к кривой L в точке $\zeta(\tau)$ образует с вещественной осью угол $\theta(\tau)$.

Обозначим через f, $f : \Pi^+ \to \Delta$ – голоморфное и однолистное отображение верхней полуплоскости Π^+ на круговой n-угольник Δ. Прообразы вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при отображении f обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, прообраз точки $\zeta(\tau) \in L$ обозначим через $\omega(\tau)$, $\omega(t_k) = a_k$.

Теорема. *Отображение f удовлетворяет уравнению*

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ln(\omega(\tau) - z)\, d\theta(\tau) + c, \tag{1}$$

где c – константа, $\gamma_k = \alpha_k - 1$.

Формула (1) получена с помощью интегральной формулы Коши. Заметим, что в случае, когда все стороны кругового n-угольника – прямолинейные отрезки, т. е. $\theta(\tau) = 0$, $\tau \in (t_1, t_n)$, формула (1) примет вид формулы Кристоффеля-Шварца. Частный случай формулы (1), когда круговой n-угольник представляет собой плоскость с разрезом по гладкой кривой, состоящей из двух дуг окружностей, получен в работе [1] (см. также [2]).

Известно, что отображение f удовлетворяет дифференциальному уравнению